Le 21 avril 2020

Pour les élèves de 5A-B

Ce document contient les énoncés du contrôle 7 sur les asymptotes au graphique d'une fonction.

ainsi que les corrections.

Je vous conseille comme exercice sur les asymptotes de refaire ce contrôle en vous aidant de votre cahier puis de vérifier vos résultats à l'aide de la correction donnée.

Bon travail !

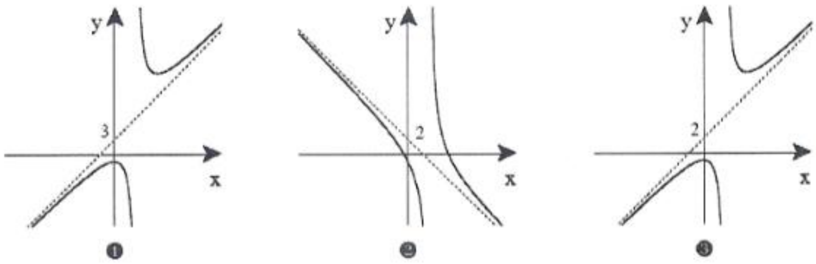
M.Bottin

NOM : A /25 5/03/2020

PRENOM :

5A-B **CONTRÔLE N° 7 :** Asymptotes au graphique d'une fonction

1. On donne la fonction $f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x-1}$. A quel graphique correspond la fonction f ? **Justifiez** votre choix. /5



2. On donne la fonction $f(x) = \frac{3x^2-6x}{x^2+2x-3}$ /15

a) Déterminez les équations des asymptotes au graphique de f et positionnez le graphique par rapport à ces asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphique avec les axes du repère

c) Esquissez le graphique de f à l'aide des résultats obtenus en a) et b).

3. Déterminez les réels a, b et c pour que le graphique de la fonction $f(x) = \frac{ax^2-4x+3}{x^2+bx+c}$ admette les asymptotes d'équations $x = -1, x = 2$ et $y = -2$. **Justifiez** vos résultats. /5

CORRECTION du C_7 (A)

1. Les 3 graphiques admettant une A.V. de même équation, déterminons l'A.O. du graphique de f. Pour ce faire, effectuons la division euclidienne de $3x^2-x+1$ par $x-1$

$$
\begin{array}{rr|l}
3x^2 - x + 1 & & x-1 \\
\cline{3-3}
-3x^2+3x & & 3x+2 \\
\cline{1-1}
2x+1 & & \\
-2x+2 & & \\
\cline{1-1}
3 & &
\end{array}
$$

donc $f(x) = 3x+2+\dfrac{3}{x-1}$

avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0$

donc $AO \equiv y = 3x+2$.

La pente (3) de l'A.O. étant positive, les graphiques 1 et 3 pouvaient convenir. Mais $(0,2) \in$ A.O. donc c'est le gr. n° 3

---

2. $f(x) = \dfrac{3x^2-6x}{x^2+2x-3}$ CE : $x^2+2x-3 \neq 0$

$\Delta = 4+12 = 16$ $\quad x_1, x_2 = \dfrac{-2\pm 4}{2} \;\begin{array}{l} 1 \\ -3 \end{array}$

a) dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$

A.V : $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = "\dfrac{45}{0}"$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = "\dfrac{-3}{0}"$

Signe de x^2+2x-3 :

x		-3		1	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 45.(-\infty) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -3.(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 45.(+\infty) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3.(-\infty) = +\infty$

$\Downarrow$ $\qquad \Downarrow$

$AV_1 \equiv x = -3$ $\qquad AV_2 \equiv x = 1$

AH : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$ donc AH $\equiv y = 3$

Position de G_f : signe de $f(x) - 3 = \frac{3x^2 - 6x - 3(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}$

$= \frac{\cancel{3x^2} - 6x - \cancel{3x^2} - 6x + 9}{x^2+2x-3}$

$= \frac{-12x+9}{x^2+2x+3}$ $\qquad -12x + 9 = 0$

$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

x		-3		$\frac{3}{4}$		1	
$-12x+9$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$

$\frac{G_f}{AH}$ $\qquad$ pt d'inter AH en $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$ $\qquad$ $\frac{AH}{G_f}$

AO : pas d'AO car G_f admet une AH en $+\infty$ et $-\infty$.

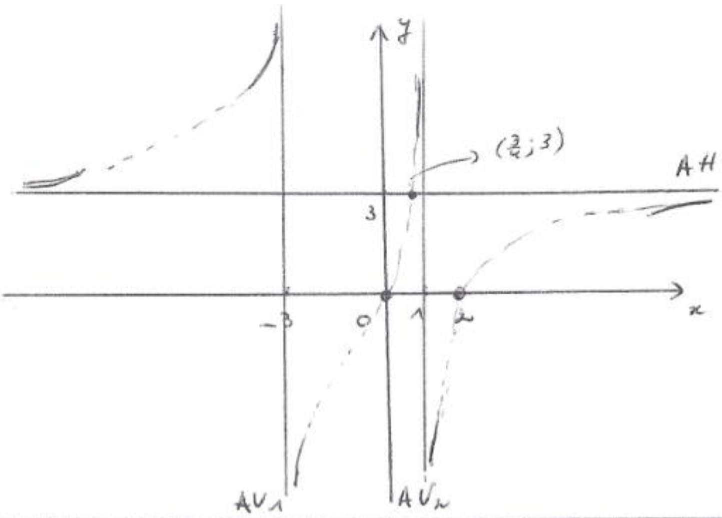
b) Points d'intersection avec Ox : $f(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff x.(x-2) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

donc $G_f \cap Ox = \{(0,0) ; (2;0)\}$

$G_f \cap Oy = \{(0,0)\}$ (évident !)

c)



---

3. $AV \equiv x = -1$ et $AV \equiv x = 2$ donc dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$

donc CE : $x \neq -1$ et $x \neq 2$

donc le dénominateur s'écrit

$D(x) = (x+1)(x-2)$

$= x^2 + x - 2x - 2$

$= x^2 - x - 2$

donc $b = -1$ et $c = -2$

AH $\equiv y = -2$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = a$

donc $a = -2$

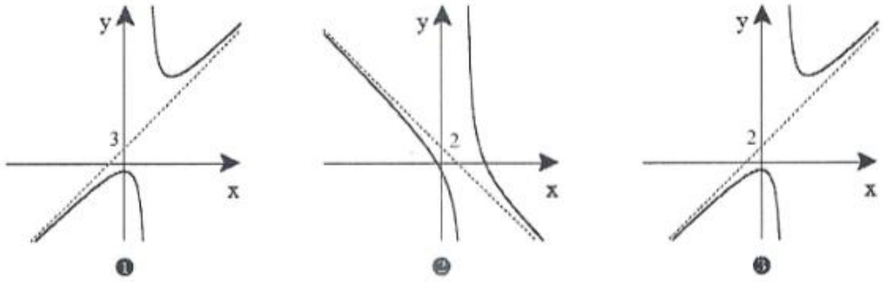
$f(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$

NOM : B /25 5/03/2020

PRENOM :

5A-B **<u>CONTRÔLE N° 7</u> :** Asymptotes au graphique d'une fonction

1. On donne la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x-1}$. A quel graphique correspond la fonction f ? **Justifiez** votre choix. /5



2. On donne la fonction $f(x) = \frac{2x^2-4x}{x^2-2x-3}$ /15

a) Déterminez les équations des asymptotes au graphique de f et positionnez le graphique par rapport à ces asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphique avec les axes du repère

c) Esquissez le graphique de f à l'aide des résultats obtenus en a) et b).

3. Déterminez les réels a, b et c pour que le graphique de la fonction $f(x) = \frac{ax^2-4x+3}{x^2+bx+c}$ admette les asymptotes d'équations $x = 1, x = -2\ et\ y = -3$. **Justifiez** vos résultats. /5

CORRECTION du C7 (B)

1. Les 3 graphiques admettant une A.V de même équation, déterminons l'A.O. au graphique de f. Pour ce faire, effectuons la division euclidienne de $-3x^2+5x-3$ par $x-1$

$$\begin{array}{r|l} -3x^2+5x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} 3x^2-3x \quad & -3x+2 \\ \cline{1-1} 2x-3 & \\ -2x+2 & \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

donc $f(x) = -3x+2+\dfrac{-1}{x-1}$

avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-1}{x-1} = 0$

donc $AO \equiv y = -3x+2$

La pente de l'A.O. (-3) étant négative, le graphique 2 correspond donc à G_f.

---

2. $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{x^2-2x-3}$. C.E : $x^2-2x-3 \neq 0$ $\Delta = 4+12 = 16$

$x_1, x_2 = \dfrac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

a) dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

AV: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{"}\dfrac{6}{0}\text{"}$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{6}{0}\text{"}$

Signe de x^2-2x-3 :

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 6.(-\infty) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 6.(+\infty) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$AV \equiv x = -1$ $\qquad\qquad$ $AV \equiv x = 3$

AH : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ donc AH $\equiv y = 2$

Position de G_f : Signe de $f(x) - 2 = \frac{2x^2-4x}{x^2-2x-3} - 2$

$= \frac{2x^2-4x-2(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3}$

$= \frac{\cancel{2x^2}-\cancel{4x}-\cancel{2x^2}+\cancel{4x}+6}{x^2-2x-3}$

$= \frac{6}{x^2-2x-3}$

x		-1		3	
$\frac{6}{x^2-2x-3}$	$+$	$\not\exists$	$-$	$\not\exists$	$+$
	G_f / AH				G_f / AH

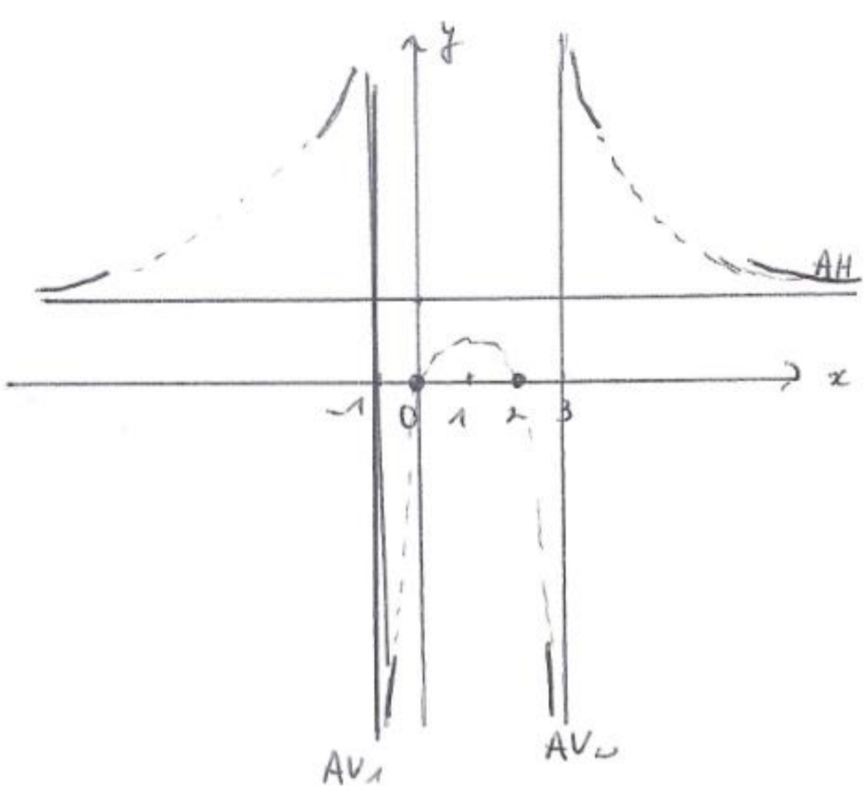
AO : il n'y a pas d'AO car G_f admet une AH en $+\infty$ et $-\infty$

b) Points d'intersection avec Ox :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

donc $G_f \cap Ox = \{(0,0) ; (2,0)\}$

$G_f \cap Oy = \{(0,0)\}$ (évident !)



3. A.V$_1$ ≡ $x=1$ et AV$_2$ ≡ $x=-2$ donc dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$

donc CE : $x \neq -2$ et $x \neq 1$

donc le dénominateur $D(x)$

s'écrit $D(x) = (x+2)(x-1)$

$= x^2 - x + 2x - 1$

$= x^2 + x - 1$

donc $b = 1$ et $c = -1$

AH ≡ $y = -3$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -3$ et comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a$

donc $a = -3$

donc $f(x) = \dfrac{-3x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 1}$.